

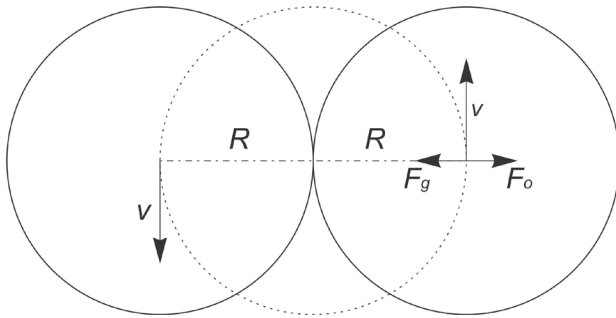
Zadania

1. Dwie identyczne kule wykonane z wolframu (gęstość: $\rho = 19\,250 \text{ kg/m}^3$) wprawiamy w ruch orbitalny dookoła ich środka masy, tak blisko, jak to możliwe (kule prawie stykają się). Obliczyć okres orbitalny T takiego układu przy założeniu, że orbity są kołowe, a wpływ innych ciał można pominąć.

Odp.: $T = \sqrt{\frac{12\pi}{G \cdot \rho}} = 1,5 \text{ godz.}$

Rozwiązanie

Zadanie formalnie przekracza zakres gimnazjum, ale z pewnością nie jest poza zasięgiem ambitniejszych uczniów.



Środki kul o masie M każda poruszają się po okręgu o promieniu R , zaznaczonym linią kropkowaną, z szybkością v . Środek masy układu znajduje się w punkcie styku kul. Okres obiegu wyznaczmy z równości siły odśrodkowej F_o oraz siły przyciągania grawitacyjnego kul F_g

$$F_o = F_g,$$

gdzie

$$F_o = \frac{Mv^2}{R}, \quad F_g = \frac{GM^2}{(2R)^2}$$

czyli

$$\frac{M \cdot v^2}{R} = \frac{G \cdot M^2}{(2R)^2}. \quad (1)$$

Aby wyliczyć okres obiegu zauważamy, że prędkość orbitalna v jest równa obwodowi okręgu podzielonemu przez okres T

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad (2)$$



a masa M to objętość kuli $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ pomnożona przez gęstość ρ

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho. \quad (3)$$

Po wstawieniu do wzoru (1) wzorów (2) i (3) i uproszczeniu wyrazów dostajemy

$$\frac{4\pi}{T^2} = \frac{G \cdot \rho}{3},$$

co ostatecznie daje wzór

$$T = \sqrt{\frac{12\pi}{G \cdot \rho}}.$$

Wartość liczbową najwygodniej obliczyć korzystając z kalkulatora wbudowanego w przeglądarkę Google, który zna wartość G , a także przeliczy jednostki. Wpisujemy w oknie zapytanie:

`sqrt(12*pi/G/(19250 kg/m^3))`

i otrzymujemy wynik $T = 1,5$ godz.

Andrzej Odrzywołek, IF UJ

2. Ile razy masa Słońca jest większa od masy Ziemi?

Na podstawie wzoru $M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ oblicz masę Słońca przyjmując odległość Ziemia-Słońce równą $R = 1,5 \cdot 10^8$ km oraz okres obiegu $T = 1$ rok. Porównaj ten wynik z masą Ziemi obliczoną na podstawie równania $M_Z = \frac{gR_Z^2}{G}$.

Rozwiązanie

Dane:

$$R = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad T = 1 \text{ rok} = 3,154 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

Masę Słońca obliczamy z zależności $M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$.

Otrzymujemy $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

Masę Ziemi obliczmy z wzoru $M_Z = \frac{gR_Z^2}{G}$.

Otrzymujemy $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg oraz $M_S/M_Z \approx 3,3 \cdot 10^5$.

